第9回　理学部門談話会

日時：　2013年1月23日（水）
13：30-15：00
場所：　理学部第１会議室（理学部２号館6F）

話題及び提供者

「研究の原点は「おもしろいね．君，それやってみたまえ」」
（鈴木　知彦）

「地震に関する話題：題目未定」
（岡村　眞）

「いくつかの不変量に潜む図形の観察」
（山口　俊博）

教職員，大学院生，学生，一般の方々のご来場をお待ちしています．

（問い合わせ：suzuki@kochi-u.ac.jp）

研究の原点は「おもしろいね．君，それやってみたまえ」

海洋生命分子工学コース： 鈴木知彦

私が生物学科に入ったのは，当時（昭和５０年），公害問題が大きく取り上げられ，それに関連している「植物生態学」（石川先生のご専門）を勉強したいと思ったからだ．しかし，基本となる動植物の名前をさっぱり覚えることができず早々にあきらめ，動物生理学講座（生化学）で卒論を行なうことにした．

研究室に配属されると，指導教授から研究のイロハを講義され，「この講座の初代教授は畑井新喜司という大先生で，その口癖が「おもしろいね．君，それやってみたまえ」であったことを伝授された．その後，指導教授から「だから君も，自分でおもしろいと思うことを見つけて，自由にやりなさい」と言われ，途方に暮れたことを良く憶えている．

生物学のおもしろさの二本柱は，普遍性と多様性の追求にあると思うが，私は後者に興味を持ち，何とか３０年以上研究を続けることができた．多様性の面白さのネタを提供してくれた生物系の先生や学生さんが，幸いにも，まわりに沢山いたおかげだと思っている．

「多様性のおもしろさ」の追求の中で，幸運だったと思っている発見は，ある機能を持つ遺伝子が，別の機能を持つ遺伝子へと変化してしまった例を見つけたことだ（トリプトファン分解酵素から進化したミオグロビンの発見，クレアチンキナーゼから進化したアルギニンキナーゼの発見）．

自分が研究を始めた頃から四半世紀がたち，単に「おもしろい」研究を行なうだけでは肩身が狭い時代になってきた．しかし，生物学に「社会的な意義や普遍性」を求められても困る．iPS 細胞は確かに重要だが，純粋に「おもしろい」生物学も共存できる研究環境を望みたい．

南海トラフ沿岸湖沼に記録された巨大津波堆積物

高知大学総合研究センター　岡村　眞

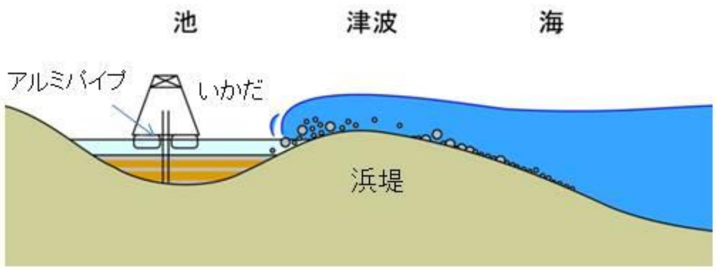
2011 年 3 月 11 日の巨大地震発生からやがて二年目を迎えようとしている。現地では巨大津波がもたらした一億トン（通常の排出量の 200 年分）の瓦礫の処理が進みつつあるものの、沿岸都市・集落の復興は始まったばかりである。近い将来発生が懸念される「南海トラフ巨大地震」の減災を考えるにあたり、今回の震災から学ぶことはあまりに多く、課題は山積した状態にある。

東北地方太平洋沖地震発生当初の地震速報は M7.9 であった。想定されていた宮城県沖地震（30 年確率で 98%）の発生をとらえたと考え、予想津波高を 3m とした。地震発生から一時間後に東北沿岸は 10m を越える津波に襲われていくのであるが、その時点では「観測結果」を報告する事に追われていく。沖合の津波計は、二回の津波発生を記録していたものの、気象庁の速報マニュアルにはこの津波計データの活用は想定になく、実際に津波予想に活用される事はなかった。地震学分野においては、東北地方太平洋沖は世界でも稠密な地震観測網が整備され、過去データも豊富であり、大地震の発生メカニズムも理解がすすんでいると概観されていた。ただし、過去 100 年間ではという但し書き付きであったことを思い知る。

一方、歴史記録では貞観 11 年（869 年）の津波が仙台平野の 4km まで侵入、多賀城下を襲い死者 1000 名との記述が残る。最近では地質学的検討も進み、この十和田火山灰（915 年）直下の津波堆積物の研究結果は複数の機関から公表されていたものの、予測研究からは「無視」されてきた。注目されたのは二万人もの犠牲者を出した後であった。この予想が十分に社会に認知されていれば、もう少し多くの人が逃げる行動をとっていたはずと思いたい。

本邦沿岸の多くは、後氷期海水準の上昇により 8000 年間程度で形成された。さらに圧縮の応力場でもあるこれらの平野は隆起傾向にあり、2000 年程度しか過去記録を知ることができない。一方、南海トラフ沿岸域は地震時には沈降場を形成し、そこには過去 6000 年間におよぶ津波の歴史が残されてきた（図 1）。陸上は基本的に浸食作用が働くが、水中は堆積の場を提供することから、過去の記録が保存されやすい。この沿岸低地の池に注目してきた津波堆積物の研究成果が、東北地方太平洋沖地震以降、注目されている。

湖沼堆積物の採取



いくつかの不変量に潜む図形の観察

高知大学理学部門教育学部（数学）　山口俊博

1. 背景

１７３５年、ケーニヒスベルグの７つの橋を１回しか通らないで散歩できるか？という問題を、オイラー（Euler）は、地図を「グラフ」という図形の一筆書きの問題に置き換えることにより解いた。これがトポロジー (topology) の始まりといわれている。「分類は人間の本能である」と言う生物学者 [M] もいるが、数えることも本能であろう。トポロジーには、オイラー数*や種数†といわれる、整数に値をもつ不変量がある [K]。このような不変量も数学以外に使えたら面白かろう [T]。 例えば

定理１：「イソギンチャクとミミズと人間」の進化の度合は、種数の違いで「０＜１＜３」と表せる。

さて、(単連結な）空間 X に対して、(有理) **トーラス階数**というトポロジー不変量 $r(X)$ は、大ざっぱに言えば (以後いちいち断らない)、どれだけ大きな次元 n のトーラス‡T^n が空間 X に自由に作用できるか？というものである§[H]。例えば、2n 次元球面¶S^{2n} には 1 次元球面 (つまり円)S^1 は自由に作用できないので、$r(S^{2n}) = 0$ となる。一方、奇数次元球面の直積に対しては $r(S^{2n_1+1} \times \cdots \times S^{2n_k+1}) = k$ である。

約１０年前、Halperin によって発見されたトーラス階数に関する不等式 $r(X \times S^{2n}) > r(X) + r(S^{2n}) = r(X) = 0$ という現象 [JL] は、少なくとも私には意外性があり、もっと詳しく知りたいと思った [Y2]。その過程で

定理２ ([Y3])：どんなに大きい偶数 n に対しても、$r(X_n) = 0$ だが $r(X_n \times S^{6n+1}) \geq n$ となる空間 X_n が存在する

こともわかった。いわば、X_n のような空間は潜在的なトーラス階数を有しており、球面という触媒によって、化学反応をおこしている感じである。ちなみに、（私の知る限り）他の有理ホモトピー不変量 $c(\ )$ では、お行儀良く $c(X \times Y) = c(X) + c(Y)$ が成り立つ。

あわせて、X における自由なトーラス作用の分類をしたいと思った [Y1]。そうでない（不動点のある）場合のトーラス作用の分類は、Puppe[P] による不動点の数や形によるハッセ図が知られている。しかし、自由な作用では不動点はない。ただ様々な軌道空間のトーラス階数達があるのみである。$r(X)$ はホモトピー不変な非負整数（量）であるが、有限の値を持つとき、系統樹に葉や実がついた図形 $T(X)$ が自然に

---

*多面体においては、「点の数-辺の数+面の数」のことで、形を連続的に動かしてもその値は変わらない。このような数を**トポロジー不変量**という。

†表裏のある閉曲面においては、穴の数のことで、球面では 0、n 人乗り浮き輪では n

‡$X \times Y = \{(x, y) | x \in X, y \in Y\}$ は、「X と Y の直積」という。例えば、n **次元トーラス** $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ 　(n 個の直積) は、$n = 2$ のとき浮き輪と同じ。

§$r(X)$ の評価は難しく、例えば Halperin の予想「$\dim H^*(X; \mathbb{Q}) \geq 2^{r(X)}$?」は、多くの研究者が部分的に示して続けているものの、いまだ未解決である。

¶ **n 次元球面**は $S^n := \{(x_0, x_1, .., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} | x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n = 1\}$ で与えられる。

現れてくる（§5）。トポロジー的観点から、自由なトーラス作用の豊富さは、$\mathcal{T}(X)$ によって、「 幹のみ (§3 参照) $<$ 可縮[‖] $<$ S^2 $<\vee_i S_i^2$（一点和） $<$ $\cdots$ 」のようになろう。$\mathcal{T}(X)$ は不変量 $r(X)$ に伴う自然な不変形であるが、座標も考慮したとき、もっと詳しい情報を持っている。例えば

定理３ ([SY])：X がある (pre-c-symplectic という) 幾何的な性質をもつなら、図形 $\mathcal{T}(X)$ は xy 座標 $(r(X)-1,1)$ の頂点を持つ。

本講演では、「不変量」から「図形」の作り方を §4 の例を交えながら紹介したい。

2. どんな「不変量」か？

対象 X に対して決まる非負整数 $c(X)$ であって、（X によっては）$c(X)=0$ なるときもあり、2 つの対象 X と Y に対し、$X \bigcirc Y$ という対象があり、常に $c(X\bigcirc Y)\geq c(X)+c(Y)$ をみたすものとする。ただし、$c(X\bigcirc Y)=c(X)+c(Y)$ となるときもあるが、$c(X\bigcirc Y)>c(X)+c(Y)$ となるときもあった方がよく、$c(X\bigcirc Y)\gg c(X)+c(Y)$ となるときもあればなおいい。ここで $\gg$ は「左辺は右辺に比べていくらでも大きくなりうる」の意味。§1 で述べたオイラー数や種数は想定していない。

また、X が単連結でない場合ときの $r(X)$ や代数 A における積の長さ nil$A$(コホモロジー環では cup length のこと) 等は、うまくいかない。

3. どんな「図形」か？

対象 X が不変量 $c(X)$ をもつとき、図形 $C(X)$ は、xy 平面 $\mathbb{R}^2$ の第１象限の格子点のみに有限個の頂点をもつ。少なくとも頂点 $P_0=(0,0)$、$P_1=(0,1)$、$\cdots$、$P_{c(X)-1}=(0,c(X)-1)$ そして $P_{c(X)}=(0,c(X))$ を必ずもち、それらは $P_0-P_1-\cdots-P_{c(X)}$ というふうに辺でつながっている。これを「**幹**」という。他の格子点にも頂点はありえて、辺でつながっている。さらに４辺形には面が張り付いて４角形になっているかもしれない。頂点の座標はゆずれないが、辺も面も曲がっていてもいい。さらに、それらを面とする３次元キューブもあるかもしれない (§6 参照)$\cdots$。$C(X)$ が「幹」のみなら、X は $c(\ )$ に関して優等生だろうが、面白みに欠けよう。

4. 詰め込み複体

（点でない）形 x のものを（有界な）領域（容器）X に入る最大個数を、**詰め込み数** $c(X,x)$ ということにする。x も X も堅くて変形できないし、x を X の中にいったん入れると動かせない。$C(X,x)$ は、x と X の大きさは変わっても、形の比が一定なら変わらない（しかしトポロジー的でない）不変量である。きちんと入れないと $c(X,x)$ 個は入らないことは、幼児でも知っている。ここで、入れ方の可能性の全体を示す図形（ＣＷ複体ともいう）は次のようにして作る。

まず、「n 個をある入れ方 $a=\{a_1,a_2,..,a_n\}$ で入れたとき、まだあと $c(X,x)-m_i-n$ 個入る（つまり $c(X-a,x)=c(X,x)-m_i-n$）」ときに、座標 (m_i,n) の点 P_i が存在する。なので $(0,0)$ は（基点として）必ず存在する。

次に、さらにもう一個、入れ方 b で入れて座標 $(m_j,n+1)$ の点 P_j になるとき、P_i と P_j の間に辺がある。当然 $m_i\leq m_j$ である。

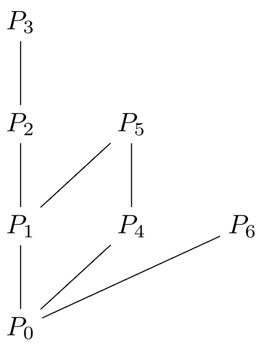
さらにもう一個入れ方 c で入れて $(m_k,n+2)$ の点 P_k になるとき、四辺形 $P_iP_jP_kP_l$ を張る面（２次元）がある。当然 $m_j\leq m_k$ である。ここで、P_l は、a のあと c でいれた点 $(m_l,n+1)$ である。ただし $P_j=P_l$ $(m_j=m_l)$ なら２辺のままである。

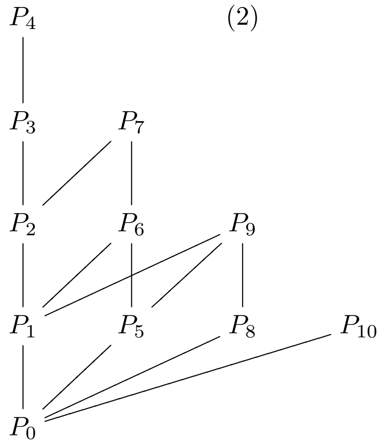
[‖]ホモトピー的に１点につぶせる [K]

このようにして三次元、四次元と続けていってできる図形を X の x による**詰め込み複体** $C(X,x)$ と定義する。

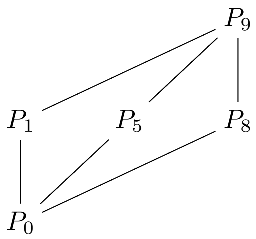
例えば、縦：横=１：３の長方形 $x = \boxed{}$ があるとする[**]。これを、縦：横=３：t の長方形の容器 X_t（$0 < t \in \mathbb{R}$）に順次入れていく。$c(X_t, x) = [t]$（t 以下の最大の整数）であることは明らかだろう。詰め込み複体 $c(X_t, x)$ は

(1)　　　　　(2)





のようになる。ここで高さ３の (1) は $3 \leq t < 4$、高さ４の (2) は $4 \leq t < 5$ のときの詰め込み複体である。ただし (2) おいて、$t = 4$ のときは $P_0P_1P_9P_5$ のみには面は張っておらず、残りの全ての４辺形に面が張り付いているので $C(X_t, x)$ は可縮であるが、$t > 4$ では、$P_0P_1P_9P_5$ にも面が張り、３つの（四角形の）面からなる紙風船（あるいは、稲荷寿司の中身をつまみ食いしたので隠すためにフタをしたもの）



$\cong\ S^2$　：膨らますと球面

ができるので、$C(X_t, x)$ は２次元球面のホモトピー型を持つ。この $C(X_t, x)$ は、t を連続的に大きくしていったとき、どのように（トポロジー的に不連続に）成長していくのだろうか？

一方、縦：横=1：t の長方形 Y_t だと、$C(Y_t, x)$ は t がいくら大きくなっても可縮（高々２次元）のまま。というのは、x を Y_t に（ずらして入れることはあっても）ななめに入れたりできないので、$C(Y_t, x)$ には傾きが 1 より小さい辺はなく、せいぜい (1) の $\square P_0P_1P_5P_4$ と同じ形の平行四角形を（タイルのように）平面的に敷き詰めたものになるからである。

ちなみに、しばしば、容器 X と Y、形 x において、$c(X \bigcup Y, x) \gg c(X, x) + c(Y, x)$ である[††]。詰め込み複体 $C(X,x)$ のトポロジーの観察によって、x から見た X の大きさや形を推し量れることを期待している。

[**]市販の JENGA という積み木 (タカラ・トミー) はそうなっている

[††]例えば、x を 1×1 の正方形、X と Y を ともに底辺が自然数 n で高さ 1 の直角三角形として、それらを斜辺どうしでくっつけた長方形を $X \cup Y$ とすると $c(X,x) = c(Y,x) = 0$ だが $c(X \cup Y, x) = n$

5. トーラス階数複体

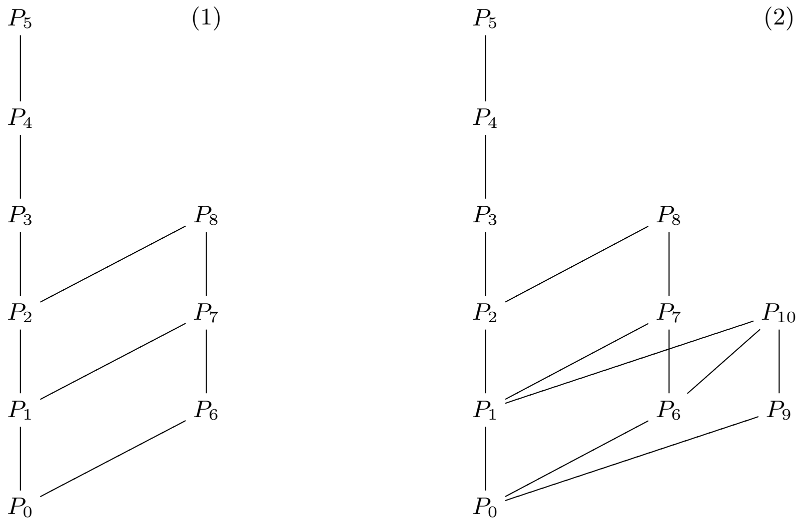
自由な T^t-作用による軌道空間 Y_i で、$r_0(Y_i) = r_0(X) - s - t$ なるものがあるとき、xy 座標が (s,t) なる 点 P_i が存在する。なお、$P_0 = (0,0)$ は X それ自身。ある頂点 P_i とある頂点 P_j の間には、Y_j は Y_i のある S^1-作用による軌道空間であるとき、辺 P_iP_j が存在する。２次元以降もこんな感じで定義していく$\cdots$（省略)。これを X の**トーラス階数複体** $\mathcal{T}(X)$ と定義する [Y1]。

定理 4 ([Y1])：高さが３のグラフは８個あり、そのうち (少なくとも) ４個は $\mathcal{T}(X)$ の１次元のものとして実現できる。

ちなみに、高さが４のグラフは９６個あり、高さが５だと 1000 個を超える [KY]。

定理 5 ([Y2])：X が奇数次球面の直積や Lie 群などのとき、xy 座標で $x = 1$ の直線上には $\mathcal{T}(X)$ の頂点は存在しない。

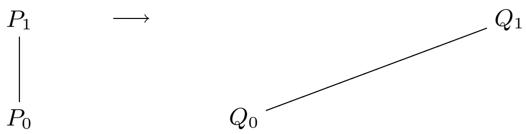
は役に立つであろう。例えば、$X_k = S^3 \times S^3 \times S^3 \times S^7 \times S^k$（$k = 3, 5, 7, 9, ...$）において、$r(X_k) = 5$ であり、$\mathcal{T}(X_k)$ は



のように与えられる。点の座標は、$P_0 = (0,0)$、$P_1 = (0,1)$、$P_6 = (2,1)$、$P_9 = (3,1)$、$\cdots$である。ここで $k = 3$ か 5 のとき (1) となり、$k = 7$ か 9 のとき (2) となるが、$k = 7$ のときは、$P_0P_1P_{10}P_6$ のみには面は張っていないので可縮。一方、$k = 9$ のときは $P_0P_1P_{10}P_6$ にも面が張っており、２次元球面のホモトピー型を持つ。$k > 9$ のときは、$\mathcal{T}(X_9)$ に、頂点 $P_{11} = (4,1)$ と辺 P_0P_{11} が加わるのみ。§4 の $C(X_t, x)$ との相関関係を見ていただきたい。

定理 6 ([Y3])：$X \overset{i_X}{\hookrightarrow} X \times Y$ から誘導される $\mathcal{T}(i_X) : \mathcal{T}(X) \hookrightarrow \mathcal{T}(X \times Y)$ は、「幹」$P_0 - P_1 - \cdots - P_{r(X)}$ が「ななめに」入っているなら、$r(X \times Y) > r(X) + r(Y)$ となる。

例えば、定理２の場合、



ただし $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (0, 1)$, $Q_0 = (0, 0)$ そして $Q_1 = (m, 1)$ $m \geq n$ となっている。ちなみに $r(X \times Y) = r(X) + r(Y)$ であっても、$\mathcal{T}(\ )$ では、そんなことは期待できない。実際

定理７：もし $\mathcal{T}(X \times Y) = \mathcal{T}(X) \vee \mathcal{T}(Y)$ なら、$\mathcal{T}(X)$、$\mathcal{T}(Y)$、$\mathcal{T}(X \times Y)$ の３つとも「幹」のみ。つまり、大概、左辺は右辺を真に（余裕をもって）含む。

問題： (1) $\mathcal{T}(X)$ は単連結（穴が空いていない）か？
(2) $\mathcal{T}(X)$ はいくつかの球面の１点和とホモトピー同値か？
(3) $\mathcal{T}(X)$ が「幹」のみ、及び、可縮のときの X を特長付けせよ。

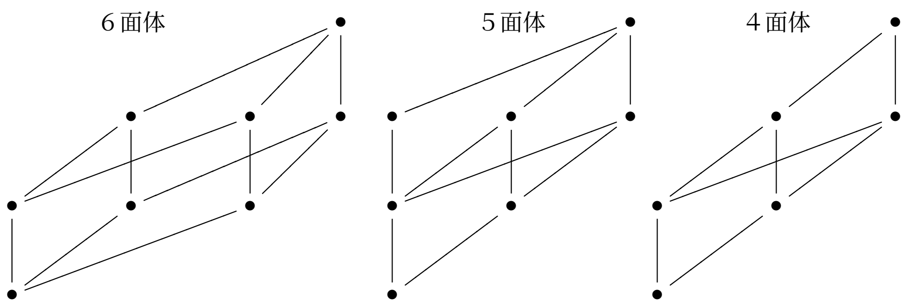
例えば、$X = S^3 \times S^3 \times S^3 \times S^3 \times S^k$ において、$k \leq 6$ なら $\mathcal{T}(X)$ は「幹」のみ。$k > 6$ では「幹」のみではないが可縮。

6. 退化したキューブ達

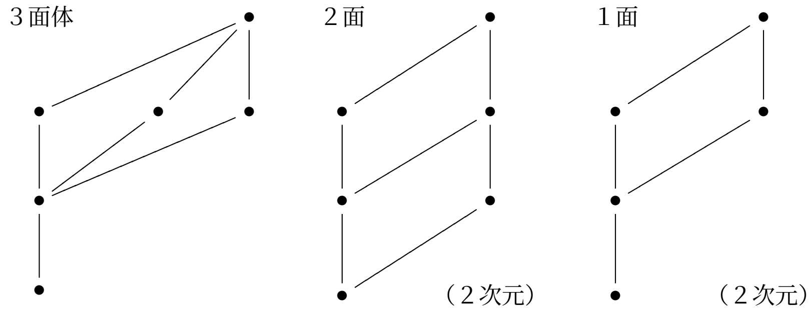
$C(X, x)$ や $\mathcal{T}(X)$ のＣＷ複体としての次元[‡‡]が X への x の入れ方やトーラス作用の「豊富さ」を表し、$c(X, x)$ や $r_0(X)$ を下から抑えている。つまり、少なくとも

定理８：$c(X, x) > \dim C(X, x)$、$r(X) > \dim \mathcal{T}(X)$、$\cdots$（大きい実は高い木に稔る）

２次元だと四角形しかないが、３次元だと、いろいろな（退化した）キューブが存在しうる：



[‡‡]中にあるｎ次元であって退化をゆるすｎ次元キューブの最大のｎのことで、退化していないｎ次元キューブは I^n（$n = 3$ のとき普通の立方体）と同相



そして、3辺 ● − ● − ● − ● を立てたもの（1次元）がある。

退化し具合によって、登場しやすさに差があるようだ。

7. 参考文献

[H]S.Halperin, *Rational homotopy and torus actions*, London Math. Soc. Lecture Note Series **93**, Cambridge Univ. Press (1985) 293-306

[JL]B.Jessup and G.Lupton, *Free torus actions and two-stage spaces*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **137**(1) (2004) 191-207

[K] 川久保勝夫, トポロジーの発想, ブルーバックス

[KY] 北村嘉久-山口, 有理トーラス階数４の基点付きグラフ, 高知大学教育学部研究報告 **72** 101-107 (2012)

[M] 三中信宏, 系統樹思考の世界,　講談社現代新書 (2006)

[P]V.Puppe,*Cohomology of fixed sets and deformation of algebras*, Manuscripta math. **23** (1978) 343-354

[N] 西田吾郎, ホモトピー論, 共立出版

[SY] J.Sato and T.Yamaguchi, *Pre-c-symplectic condition for the product of odd-spheres*, J. Homotopy Relat. Struct. (2012)

[T] 玉木大, 広がりゆくトポロジーの世界, 現代数学社 (2012)

[Y1] T.Yamaguchi, *A Hasse diagram for rational toral ranks*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **18** (2011) 493-508

[Y2] T.Yamaguchi, *Examples of rational toral rank complex*, Int. J. Math. Math. Sci. (2012) Art. ID 867247

[Y3] T.Yamaguchi, *Rational toral rank of a map and related cellular maps*, 投稿中

E-mail address: `tyamag@kochi-u.ac.jp`　(2013/1/23)