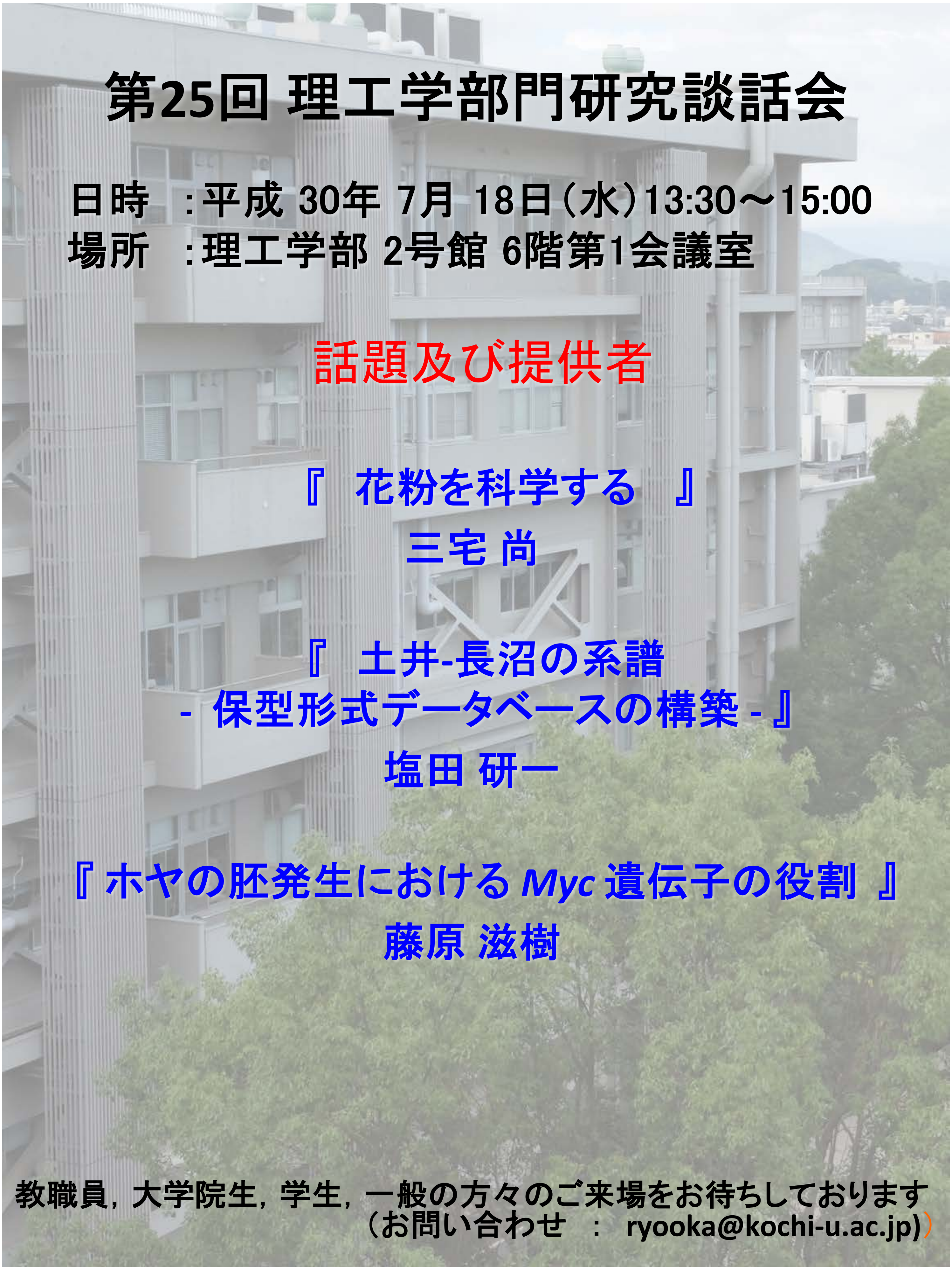

第25回 理工学部門研究談話会

日時　: 平成 30年 7月 18日（水）13:30～15:00
場所　: 理工学部 2号館 6階第1会議室

話題及び提供者

『　花粉を科学する　』
三宅 尚

『　土井-長沼の系譜
- 保型形式データベースの構築 - 』
塩田 研一

『 ホヤの胚発生における *Myc* 遺伝子の役割 』
藤原 滋樹

教職員，大学院生，学生，一般の方々のご来場をお待ちしております
（お問い合わせ　:　ryooka@kochi-u.ac.jp）

花粉を科学する

生物科学科　三宅　尚

春先にくしゃみをすると，「ひょっとして花粉症？」と人に聞かれるほど，花粉症は身近なものなりました．花粉症に悩まされている人たちにとって，花粉は大変厄介なものに違いありません．花粉は本来，その中にもつ精細胞あるいは精子を，雌しべの中の卵細胞に送り届けるための袋で，種子をつくり次の世代を残す上で重要な役割を果たしています．

花粉には 2 つの特徴があります．1 つ目は，花粉は生殖に関わる重要な構造ですので，総壁というとても丈夫な壁をもつことです．花粉が化石として地層に残るのも，頑丈な壁をもつためです．2 つ目は，花粉のかたちが植物の種類によってさまざまであることです．花粉の大きさはだいたい 20～60 μm であり，ヒトの目にはただの点にしか見えません．しかし，顕微鏡でよく観察すると，そのかたちは美しく精妙で，それでいて奇妙で愛嬌があり，見飽きることがありません．

「花粉学」とは花粉を対象とする研究分野です．その内容は実にさまざまで，花粉症や空中花粉の研究の他に，分類や遺伝，進化など生物学の分野から，ハチみつの製造や犯罪捜査に関係するものまであります．私の専門は「古生態学」です．地層の中から取り出した花粉の化石を対象として，過去にどんな植生があったのか，また，それらが過去から現在まで，周囲の環境の変化とともに，どのように移り変わってきたのかを調べる研究をしています．最近ではまた，日本ではなじみの薄い「法花粉学（司法制度への科学技術の応用である「法科学」の 1 分野で，花粉を扱う）」に関する研究を進めています．

この談話会では，花粉学という研究分野と，花粉化石から明らかにされた高知平野の植生の歴史についてご紹介したいと考えています．

土井-長沼の系譜　— 保型形式データベースの構築 —

情報科学教室　塩 田 研 一

楕円曲線暗号と呼ばれる公開鍵暗号は、ビットコインで用いられたことから最近少し有名になりました。その礎である楕円関数論や保型形式の整数論は、もちろん暗号理論を目的として生み出された訳ではなく、フェルマ、オイラー、ガウス、アーベル、ヤコビといった数学者たちが純粋な興味のもとに研究し続けてきたものです。

今日は私の整数論方面での研究のご紹介とともに、整数論の先生方のお人柄についてもお話しできればと思います。まずは登場人物のご紹介から。

志村五郎先生

1930 年 2 月 23 日のお生まれ。昭和 5 年のお生まれですので五郎先生とおっしゃいます。保型形式の整数論を、その土台を整備し直すことから始めて飛躍的に発展させ、志村理論と呼ばれる理論を打ち立てられました。後にフェルマ予想を解くことになる「志村予想」を提唱されたことでも有名です。プリンストン大学名誉教授。

土井公二先生

長沼先生の指導教官にして実験整数論の大家。「土井-長沼リフティング」、「ブリューマ-土井の合同式」などを発見されました。志村先生をガウス (1855 年 2 月 23 日没) の生まれ変わりと信じ、天皇陛下の如く尊敬されています。

長沼英久先生

修士課程から土井先生に師事し、「土井-長沼リフティング」を発見。京都大学助手、金沢大学講師・助教授を経て、1983 年、高知大学理学部数学科教授に就任されました。1990 年には情報科学科を設立され、2003 年 9 月から 2005 年 3 月まで理学部長も務められています。

塩田との関わり

指導教官の吉田先生は志村先生のお弟子さんに当たり、修士論文題目は「志村の楕円曲線の explicit model について」。1988 年より、北海道大学から立命館大学に移られた土井先生のご指導を受け、1990 年に博士号を取得、長沼先生の情報科学科創設に参加しました。2010 年、土井先生のお奨めにより保型形式の数値計算を再開しています。

フェルマ予想解決と高知大学の関わり

- 1637 年頃、フェルマはディオファントスの「算術」の余白に

  「3 以上の自然数 n について方程式 $x^n + y^n = z^n$ は自然数解を持たない」

  という書き込みをします。
- フェルマ自身は $n = 4$ の場合を証明しましたが、360 年にわたって完全な証明を拒み続け、そのことが逆に整数論の発展を推し進めてきました。
- 1964 年、志村先生が「志村予想」を提唱されます：

  「整数係数の楕円曲線は全てモジュラーであろう」
- 1969 年頃、土井先生・長沼先生が「土井-長沼リフティング」を発見されました。底空間の異なる保型形式の間にリフティングという関係を見い出した画期的な発見で、これが「Base Change の理論」という一大分野へ発展します。

- 1980 年代、「志村予想」の「半安定な場合」がフェルマ予想を含むことが判明します。
- 1994 年、Base Change の理論を用いてワイルズが半安定な場合の「志村予想」を証明、従ってフェルマ予想も証明されました。(のち、完全な「志村予想」も証明されました。)

保型形式

「志村予想」に登場する保型形式は重さ 2 の一変数保型形式で、「レベル」と呼ばれるパラメータが付いています。レベル q の保型形式の空間 $M_2(\Gamma_0(q))$ は複素数体上の有限次元線形空間であり、「アトキン-レナー作用素」と「ヘッケ環」が作用しています。

保型形式の分解

$M_2(\Gamma_0(q))$ は、まず、アイゼンシュタイン級数の空間 $E_2(\Gamma_0(q))$ とカスプ形式の空間 $S_2(\Gamma_0(q))$ とに分解します。次に、$S_2(\Gamma_0(q))$ はアトキン-レナー作用素達の $(\pm)$-固有空間に分解し、更に、それらはヘッケ環の作用で不規則に分解してゆきます。

特にレベル q が素数の場合にはアトキン-レナー作用素はひとつだけで、その $(\pm)$-固有空間 $S_2^{\pm}(\Gamma_0(q))$ は次の表のように分解します。ここでたとえば $S_2^-(\Gamma_0(67))$ の欄に $1+2$ とあるのは、3 次元の $S_2^-(\Gamma_0(67))$ がヘッケ環の作用で 1 次元と 2 次元に分解することを表しています。

q	$S_2^+(\Gamma_0(q))$	$S_2^-(\Gamma_0(q))$
11		1
17		1
19		1
23		2
29		2
31		2
37	1	1
41		3
43	1	2
47		4

q	$S_2^+(\Gamma_0(q))$	$S_2^-(\Gamma_0(q))$
53	1	3
59		5
61	1	3
67	2	1 + 2
71		3 + 3
73	2	1 + 2
79	1	5
83	1	6
89	1	1 + 5
97	3	4

q	$S_2^+(\Gamma_0(q))$	$S_2^-(\Gamma_0(q))$
9887	375	449
9901	397	1 + 426
9907	398	2 + 425
9923	389	1 + 437
9929	376	451
9931	391	2 + 434
9941	1 + 380	447
9949	402	426
9967	396	1 + 2 + 431
9973	2 + 402	426

http://lupus.is.kochi-u.ac.jp/shiota/brandt/factorization.html

モジュラーな楕円曲線

モジュラーな楕円曲線とは、$S_2(\Gamma_0(q))$ の 1 次元の因子から構成される楕円曲線のことです。たとえば $S_2^-(\Gamma_0(11))$ はそれ自身が 1 次元ですが、この因子からは定義方程式 $E : y^2 + y = x^3 - x^2 - 10x - 20$ で定まる楕円曲線が得られます。整数係数の楕円曲線は全て保型形式の 1 次因子から構成できるという主張が「志村予想」です。

テータ級数を用いた保型形式の計算方法 (レベル q が素数の場合)

一定の規則の元に 4 変数の整数係数二次形式をたくさん作り、その二次形式に付随するテータ級数を求めると、これらが $M_2(\Gamma_0(q))$ を生成します。

計算すべきテータ級数の個数は、保型形式の次元を $H = \dim M_2(\Gamma_0(q))$ として H^2 個。$H \fallingdotseq q/12$ ですのでレベル q が 10000 近くになると凡そ 70 万個のテータ級数が必要になります。

(二次形式というのは

$$f(x,y,z,w) = 12x^2 + 12y^2 + 44z^2 + 44w^2 + 44xz + 44yw$$

のような斉 2 次式のことで、$f(x,y,z,w) = n$ の整数解の個数 $a(n)$ を係数にして

$$\theta(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) \exp(2\pi\sqrt{-1}n\tau)$$

と定義した関数がテータ級数です。)

塩田の博士論文 [1]（1990 年）

志村先生の予想に貢献すべく、$S_2(\Gamma_0(q))$ の 1 次因子について何か手掛かりを得たいという動機で研究が始まりました。

上述の $S_2^-(\Gamma_0(67))$ の分解は実はテータ級数の一次従属関係から引き起こされており、そのような例はこの一例しか知られていませんでした。そこで、1000 以下の全ての素数レベルに対してテータ級数を計算し、その一次従属関係を調べてみよう、ということになりました。3 つの大きな成果が得られました：

1. 一例しか知られていなかったテータ級数の一次従属関係を、何百例も発見しました。
2. ヘッケの予想 (1940 年提唱) の反例を発見しました。
3. 同じテータ級数を持つ、非同値な 4 変数整数係数二次形式の例を発見しました。(二次形式の大御所 M. Kneser の業績を綴った論文 [2] にも引用されています。)

— その後、塩田の仕事は情報科学の教育・研究・運営にシフトしてゆきます。

2010 年のできごと

きっと私にもう一度整数論の論文を書かせてやりたいとお思いになったのだと思います。土井先生にお声掛け頂いて、博士論文のデータを復活することになりました。土井先生はこれを元に「繋ぎの素数」を算出されます。「繋ぎの素数」とは、同一レベルの保型形式の異なる因子間の合同式を与える素数のことで、たとえば土井先生はレベル $q = 431$ において 3 次因子と 24 次因子の間の繋ぎの素数 6947 を発見されました。これには 27 次行列の行列式を整数係数のまま計算する必要がありましたが、土井先生はそれを手計算で成し遂げられます。恐るべき計算力です。そして塩田には更なる計算を促されます。

保型形式データベースの構築

博士論文ではレベル 1000 までだったところを、現在は 10000 以下の全ての素数レベルへ範囲を拡大して保型形式のデータを計算し続けています。先ほども述べましたとおり、レベル 10000 近くでは約 70 万個のテータ級数を計算しなければなりませんし、最大で約 470 次の整数係数行列の固有多項式とその既約分解、固有ベクトルの計算などが求められますので、プログラムは全て自作です。

2018 年現在の進捗状況

- 保型形式の分解は計算が完了しています。
- ヘッケの予想の反例は、博士論文で発見したレベル $q = 307$ 以外にはみつかっていません。（逆に言うと、レベル $q = 307$ はかなり特殊な場合だということです。）
- 繋ぎの素数は 4000 以下のレベルで計算が終わっています。
- データ量はテキストファイルで既に 400GB を超えています。

土井先生の教え — 学問は「敬い」から —

「偉大な先生には敬いを持って接しなければならないのです。」直接口にされたことは一度しかありませんでしたが、土井先生は常にそのことを身をもってお示しになりました。敬いの心こそが学問を育てるのだというのが、土井先生の最大の教えです。

参考文献

1. Ken-ichi Shiota, On theta series and the splitting of $S_2(\Gamma_0(q))$, J. Math. Kyoto Univ., 31 (1991), pp.909-930.
`http://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.kjm/1250519669`
2. Rudolf Scharlau, Martin Kneser's Work on Quadratic Forms and Algebraic Groups, Contemporary Mathematics 459 (2009).
`http://www-lsii.mathematik.uni-dortmund.de/~scharlau/Research/scharlau-qfc2007.pdf`

『ホヤの胚発生における *Myc* 遺伝子の役割』

藤原 滋樹

（理工学部 化学生命理工学科 ／ 理学部 海洋生命・分子工学コース）

談話会では 4 年ぶりの話題提供です。今回は 2 人の卒論生（2015 年度の米須清隆君と 2017 年度の川原詩織さん）の研究を紹介します。

ホヤのオタマジャクシ型の子ども（胚）は，わずか数千個の細胞でできています（図 1）。ホヤの受精卵は，厳密に決められた回数（細胞によりますが，平均して 11〜12 回）の細胞分裂をした後に，分裂を停止して，いろいろな組織（脳，筋肉，神経など）に分化します。予定どおりに細胞分裂を進行させ，また停止させることは，ホヤにとって非常に重要なはずですが，その仕組みはわかっていません。

米須君と川原さんの研究は，ホヤ胚の細胞分裂のコントロールに *Myc* 遺伝子が重要な役割を担うことを明らかにしました。正常な胚において *Myc* は間充織や内胚葉，脳の一部の細胞で発現しています（図 2）。これらの細胞は，オタマジャクシが大人になった後も細胞分裂を続ける細胞です。一方，*Myc* を発現しない脊索や筋肉の細胞の多くは，受精卵から数えてちょうど 9 回の分裂をして，オタマジャクシの形になる前に分裂を終了します。受精卵に *Myc* 遺伝子を導入して，筋肉の細胞で無理やり *Myc* を発現させたところ，オタマジャクシの体に，正常胚では見られない細胞の塊ができました（図 3）。この細胞の塊では *Myc* の mRNA が検出されました。つまり，細胞の塊は *Myc* を発現させたせいでできたものとわかります。一方，間充織で *Myc* の機能を邪魔したところ，異常に大きな間充織細胞が見つかりました（図 4）。この結果は，間充織の細胞が細胞分裂を途中でやめたことを示唆します。これらのことから，ホヤ胚においては *Myc* さえはたらけば本来止まるべき細胞分裂を続けさせられること，また *Myc* のはたらきさえ抑えれば細胞分裂を止められることを意味します。つまり，一定回数の細胞周期を進行させ，その後これを予定どおりに停止させる仕掛けの一端に，*Myc* の発現調節が関わっていることが示唆されました。

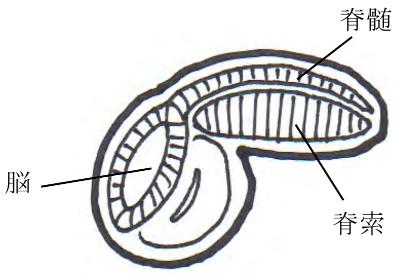

図 1　ホヤの子ども（胚）

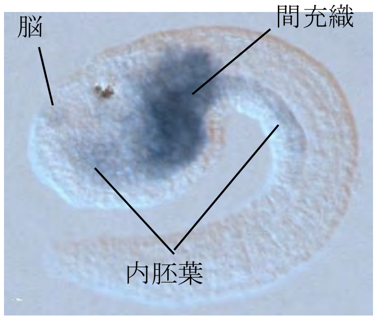

図 2　ホヤの *Myc* の発現

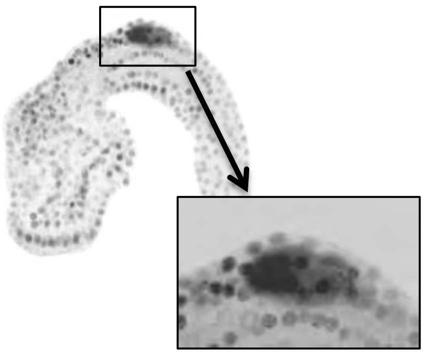

図 3　*Myc* の発現によってできた細胞の塊

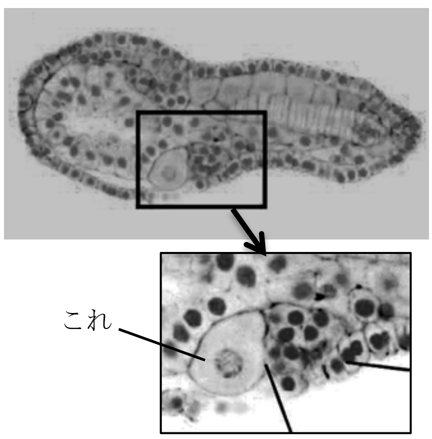

図 4　*Myc* の機能を阻害してできた大きな細胞