

第33回 理工学部門研究談話会

日時 : 令和 3年 1月27日(水) 13:30~14:30

方法 : Microsoft Teams によるオンライン配信

話題及び提供者

『テータ関数と素数の分布について』

土基 善文

『地殻活動に伴う界面動電現象』

村上 英記

教職員, 大学院生, 学生, 一般の方々のご参加をお待ちしております
(お問い合わせ: ryooka@kochi-u.ac.jp)

整数の分布と THETA 関数

問題 0.1. 整数 n が素数である確率はいくらか？

答えその 1: 素数定理
 n が素数である確率は、約 $\frac{1}{\log(n)}$. つまり n のケタ数に反比例する。

0.1. **双子素数.** $n, n+2$ がともに素数であるような n を双子素数と呼ぶ。

問題 0.2. 双子素数は無限個あるか？

答え:
未解決。だが、密度についての予想はある。

1. SCHINZEL の予想

1.1. **Statement.** From <http://mathworld.wolfram.com/SchinzelsHypothesis.html>

仮定

- (1) $f_1(x), f_2(x), \dots, f_s(x)$ は有理数係数の既約多項式。
- (2) x が正の整数のとき、 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_s(x)$ は、正の整数を値に取る。
- (3) どんな正の数 n に対しても、積 $f_1(x)f_2(x)\dots f_s(x)$ が全て n の倍数でないような x が存在する。正の整数を値に取る。

結論

無限個の x に対して $f_1(x), f_2(x), \dots, f_s(x)$ は素数である。

1.2. **考え方.** $f_j(n)$ が素数である確率はその対数に比例する。すべての j についてそれらが独立ならそれで ok.

ところが、それらは独立ではない。双子素数の場合 ($x, x+2$ の場合) ですらそうである。constant (Hardy-Littlewood constant) 倍 の分だけずれる。<http://mathworld.wolfram.com/k-TupleConjecture.html> を参照のこと。heuristic がある。

conjecture 1.1 (Dickson's Conjecture). *Let the irreducible polynomials $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$ be integer valued, have a positive leading term, and suppose $f_i(x)$ has degree $d_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, k$). The number of values of n with $0 < n \leq N$ which yield simultaneous primes is approximately*

$$\frac{1}{d_1 d_2 \dots d_k} \prod_p \frac{1 - w(p)/p}{(1 - 1/p)^k} \int_2^N \frac{dx}{(\log(x))^k} \sim \frac{N}{d_1 d_2 \dots d_k (\log N)^k} \prod_p \frac{1 - w(p)/p}{(1 - 1/p)^k}.$$

ただし、

定義 1.1.

$$w(p) = \#\{x \in \mathbb{F}_p; f_1(x)f_2(x) \cdots f_k(x) = 0\}$$

問題 1.1.

$$\iota: \mathbb{Z} \rightarrow \prod_p \mathbb{F}_p$$

を考える。 $A_p \subset \mathbb{F}_p$ ($p \in P$) にたいして、 $\text{Image } \iota \cap \prod_p A_p \neq \emptyset$ となる条件はなにか? $\{\#A_p/p; p \in P\}$ を中心にすえて考えよ。

$f(n) = a_k \prod_{i=1}^k (n - \alpha_i)$ と因数分解し、Dedekind 環 $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)}$ での素イデアルの分解の理論を利用する。 $(n - \alpha_1)$ が素イデアルになるような n は多くあるのだろうか?

\mathbb{Q} 上既約な f に対して、

$$f(x) = a \prod_j (x - \alpha_j)$$

と因数分解する。 $\alpha = \alpha_1$ は既約多項式 f の根であるから、 f はその \mathbb{Q} 上の最小多項式であり、 $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ は α の共役を与える。 $n - \alpha$ の \mathbb{Q} 上の全共役は $\{n - \alpha_i\}_{i=1}^k$ であるから、ノルム $N = N(\mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)/\mathbb{Q})$ に関して、

$$N(n - \alpha) = \prod_j (n - \alpha_j)$$

つまり、

$$aN(n - \alpha) = f(n).$$

- 各素数 q に対して、 $(q, n + \alpha) = (1)$ となる n はどのくらいの比率であるか?
- $(q, n + \alpha) = (1)$ をどのくらいの範囲の q に関して言えば、 $f(n)$ は素数であると言えるのか。

1.2.1. \bar{P} . $P = \text{Spm}(\mathbb{Z})$ とする。各 $p \in \bar{P}$ と $q \in P$ に対して、 $p \bmod q \in \mathbb{F}_q$ が well-defined である。それらを成分として $\varphi : P \rightarrow \prod_{q \in P} \mathbb{F}_q$ が定義される。 $\varphi(P)$ の各元は、0 をちょうど一つ成分に持つ。

$$\varphi(\partial P) \subset \prod_{q \in P} \mathbb{F}_q^\times = \bigcup_q \pi_q^{-1} \mathbb{F}_q^\times$$

$\bigcup_q \pi_q^{-1} \mathbb{F}_q^\times$ は $\prod \mathbb{F}_q$ の閉集合である。Dirichlet の定理により、 $\varphi(\partial P)$ は $\prod \mathbb{F}_q^\times$ で dense であることがわかるから、

$$\varphi(\partial P) = \prod_{q \in P} \mathbb{F}_q^\times$$

1.2.2. 一般化.

$$\varphi : \bar{Z} \rightarrow \prod_p \mathbb{F}_p$$

が定義される。 $\varphi^{-1}(1)$ の元には例えば、 $\{p^\heartsuit + 1 | p \in P\}$ がある。ただし $p^\heartsuit = \prod_{\substack{q \leq p \\ q \in P}} q$.

$\varphi^{-1}(\prod_p A_p)$ の元のうち、その ultrafilter としての元をうまく選ぶとその中に

$$\prod_{q \leq \sqrt{p}} \pi_q^{-1}(A_q)$$

の元が得られるのではないか?

2. ϑ -関数と量子的ななにか

ϑ -関数については [1] に記号を合わす。

2.1. **主旋律.** $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ が

$$\forall k \in \mathbb{Z} 0 < k < \sqrt{m} \implies k \mid m$$

を満たすとする。このとき m は素数である。

2.2. **アイディア.** 数の区間を確率的な重さに置き換える。

とくに x の存在確率を

$$C^{-1} \exp(-t\pi(x - m)^2)$$

に置き換える。 $C = C_{t,m}$ は全体の確率が 1 になるように決める。すなわち、

$$\begin{aligned} C_{t,m} &= \sum_{x \in \mathbb{Z}} \exp(-t\pi(x-m)^2) \\ &= \sum_{x \in \mathbb{Z}} \exp(-t\pi x^2 + 2t\pi m x - t\pi m^2) \\ &= \exp(-t\pi m^2) \vartheta(-itm, it) \end{aligned}$$

とおく。(m が整数の場合に限定すれば、 $C_{t,m}$ は m に依らない値をとるので $m = 0$ の場合と等しくなり、

$$C_{t,m} = \sum_{x \in \mathbb{Z}} \exp(-t\pi x^2) = \vartheta(0, it)$$

と少し簡単になる。))

2.3. 選んだ数が a で割って d 余る確率。

$$\begin{aligned} C^{-1} \sum_{x \in a\mathbb{Z}+d} \exp(-t\pi(x-m)^2) &= C^{-1} \sum_{y \in \mathbb{Z}} \exp(-t\pi((ay+d-m)^2)) \\ &= C^{-1} \exp(-t\pi(d-m)^2) \sum_{y \in \mathbb{Z}} \exp(-t\pi(a^2 y^2 + 2a(d-m)y)) \\ &= C^{-1} \exp(-t\pi(d-m)^2) \vartheta(ita(d-m), ita^2) \end{aligned}$$

2.4. 選んだ数が a と互いに素な確率。

$$= C^{-1} \sum_{\substack{0 < d < a \\ \gcd(d,a)=1}} \exp(-t\pi(d-m)^2) \vartheta(ita(d-m), ita^2)$$

2.5. 転調. 変数の使い方を少しだけ変える。Mumford の theta 関数の書き方に合わせよう。まず、(これは Mumford 的ではないが)

$$e(x) = \exp(2\pi\sqrt{-1}x)$$

とおく。 $\tau \in \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}$ と $z \in \mathbb{C}$ にたいして、

$$Q(n; z, \tau) = \frac{1}{2}\tau n^2 + zn$$

とおき、

$$\vartheta(z, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e(Q(n; z, \tau))$$

と書く。 ϑ は Mumford の本にある theta 関数の定義と一致している。和は z, τ について局所一様に絶対収束していて、項別の微積分についてめっぽう強い形であるから、多少の無理がきく

2.5.1. *theta* 分布. \mathbb{Z} 上の分布

$$(*) \quad n \mapsto e(Q(n; z, \tau))/\vartheta(z, \tau)$$

のことを *theta* 分布と呼ぶことにする。 τ, z が純虚数ならば *theta* 分布は \mathbb{Z} 上の確率分布である。但し τ, z を特には純虚数に限定することはないしておく。*theta* 分布は \mathbb{Z} 上の (複素) measure に対応するから、その measure を $\mu = \mu_{z, \tau}$ と書くことにする。

μ の言葉で言えば、(*) は

$$\mu(\{n\}) = e(Q(n; z, \tau))/\vartheta(z, \tau) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$\mu(S) = \sum_{n \in S} e(Q(n; z, \tau))/\vartheta(z, \tau) \quad (S \subset \mathbb{Z})$$

と書くこともできる。

2.5.2. $\mu(a\mathbb{Z} + d)$.

$$\begin{aligned} \mu(a\mathbb{Z} + d; z, \tau) &= \mu(a\mathbb{Z} + d) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e(Q(am + d; z, \tau))/\vartheta(z, \tau) \\ &= \vartheta(ad\tau + az, a^2\tau)e(Q(d; z, \tau))/\vartheta(z, \tau) \end{aligned}$$

$\mu(a\mathbb{Z} + d)$ —————

$$\mu(a\mathbb{Z} + d; z, \tau) = \frac{\vartheta(ad\tau + az, a^2\tau)e(Q(d; z, \tau))}{\vartheta(z, \tau)}$$

これが *theta* 分布においた数が a で割って d あまる確率である。

結論 —————

theta 分布においた数を a で割ったあまりは楕円関数で表現できる。

問題 —————

上の楕円関数との関係はどのような意味を持つか (複素関数として、楕円曲線の moduli 空間の関数として、etc.)

REFERENCES

1. D. Mumford, *Tata lectures on theta I*, Progress in mathematics, Birkhäuser, 1983.

地殻活動に伴う界面動電現象

村上英記@理工学部地球環境防災学科

1. はじめに

地震時の発行現象をご存じでしょうか。日本の記録では「三代実録」の貞観十一年（869年）の三陸地震の記録まで遡ることができます（日本書紀の683年という説もあります）。昭和の南海地震でも沿岸部を中心に70件（高知県24件）の証言が残っています。これらの発光現象の原因の一つとして界面動電現象を考えたのが寺田寅彦

（Terada, 1931）です。地震に関連する現象の原因として界面動電現象を取り上げたのは寺田寅彦が初めてではないかと思えます。

さて、本日は発光現象のお話ではなく地殻活動—地震や火山の活動—に伴う界面動電現象の紹介をしたいと思います。

2. 界面動電現象(Electrokinetic Phenomena)

界面動電現象は、液相-液相あるいは液相-固相境界（界面）において両相間に相対運動を与えると、運動方向にそって電位差を生じたり（流動電位、沈降電位）、界面にそって電位差を与えると界面間に相対運動（電気泳動、電気浸透）が生じたりする現象の総称です。地下で地下水が流動すれば、岩石と間隙水との境界における相対運動により電位が発生することが期待されます。ケイ酸塩鉱物の空隙を水が流動すると、流動する方向が電位的に正になるように電位が発生します。

Mizutani et al. (1976) 及び Mizutani and Ishido (1976) は、地震の前や最中に観測が報告されている電磁気現象は地下水流動による界面動電現象として説明可能であるという理論的根拠を与え、地球科学分野での界面動電現象の認知を広げることになりました。Mizutani et al. (1976) の中で寺田の流動電位の見積に対して地震学的知見から可能性を否定しています。また、この論文の中で地震制御の可能性についても論じています。

3. 地殻活動に伴う界面動電現象

ここからは、地殻活動に伴う界面動電現象の観測について紹介します。

3.1 活断層に伴う自然電位分布

明治29年陸羽地震の地表地震断層である千屋断層周辺には温泉や湧水が多数存在するため、断層に沿って地下水の流動があると考えられます。Murakami et al. (1984,1987) は、千屋断層周辺の自然電位分布（図1）を測定し、その分布が地下水流動による流動電位として説明可能であることを示しました。

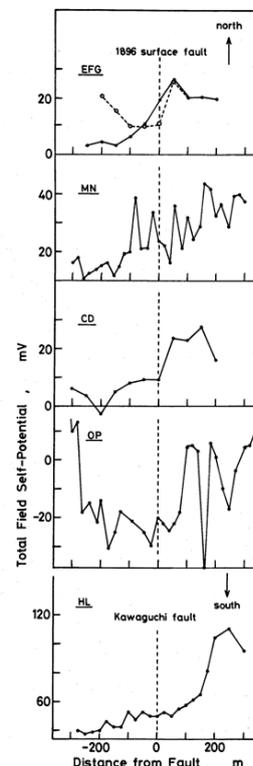


Fig. 10. Summary of total field self-potential profiles across fault lines. The top is the northernmost profile, and the bottom is the southernmost profile.

図1 千屋断層の自然電位分布

山側（図1の右側）が電氣的に正になっていることを憶えておいて下さい。

3.2 三宅島の自然電位分布

三宅島は1940年以降の3回の噴火（1940, 1962, 1983）では約20年間隔であることから、次は2003年前後の可能性が高いとして1991年、1995年、1996年の3回にわたり三宅島を縦断する繰り返し測定に参加し、噴火前の火山の電位分布を明らかにしました（Sasai et al., 1997）。

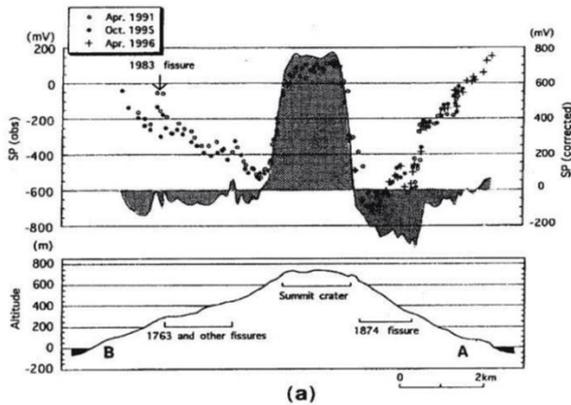


図2 三宅島の自然電位分布

図2の上が自然電位の分布，下が地形を表しています。三宅島の電位には2つの特徴があります；1) 標高が低くなると電位は上昇する，2) 山頂部付近は電気的に正になる。最初の特徴は「自然電位の地形効果」と呼ばれる現象で，天水が地下に下降する際に生じる流動電位として解釈され，2つ目の特徴は火山下の熱水対流に伴う流動電位によるものと解釈されています。噴火が近づけば，地下の熱水対流が活発になり自然電位の分布も変化するのではないかという想定で観測をおこない，2000年の学会で次回の観測打合せを行うつもりでしたが学会の直前に噴火をしてしまいました。

先に紹介した千屋断層の自然電位分布は「自然電位の地形効果」では説明できないので別のメカニズムが必要だったことが分かります。

3.3 野島断層注水実験

1997年から2018年まで行われた野島断層注水実験の際の自然電位の観測について紹介します。この注水実験は，1995年兵庫県南部地震の地表地震断層である野島断層の固着過程をモニターするプロジェクトとして始まり，数年おきに野島断層の破碎帯に達する1800m深のボーリング孔に注水をして様々な現象を観測するというものでした。

1800m孔に注水した水が周囲に流出する際に流動電位が発生します。図3の最下段が注水の圧力や流量を表しており，最上段が注水孔に最も近い側線の電位変化を示しています。注水に同期した電位変化が観測されています。

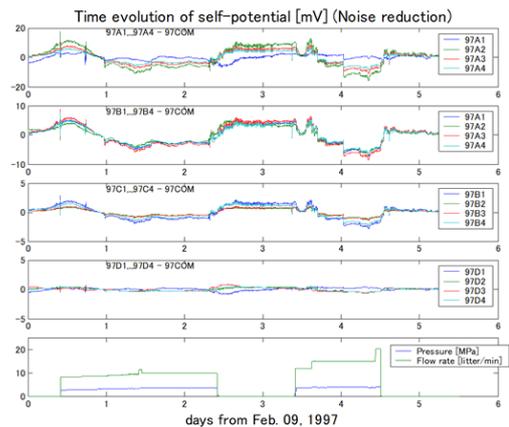


図3 注水に伴う自然電位の変動(1997年)

同じ水圧（流量）をかけて注水を行った時に出現する電位変化の大きさの変化から，地下の透水性の時間変化を評価しようというのが自然電位観測の目的でした（例えば，Murakami et al., 2001, 2007, 村上・野本, 2019）。初期の目的とは異なり深さ540m付近から水が流出していたので，この深さ付近の透水性ということになりますが，地震発生後の数年（10年以下）で透水性が減少し安定した状態になっていることが分かりました（図4）。野島断層での地震発生間隔は約2000年とされているので，地震発生の瞬間から次の地震に向けて準備が始まっていると言えます。

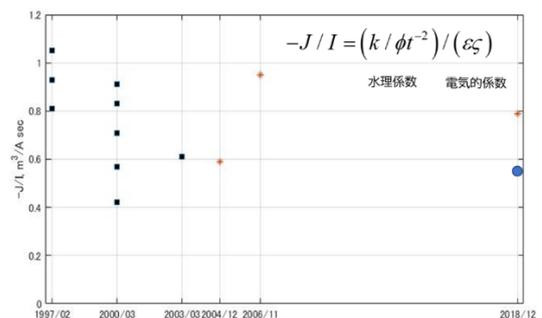


図4 野島断層の透水性の時間変化

4. おわりに

自然電位の変動原因には様々なものがあり特定が難しく，人工的なノイズからの抽出という課題もあるのですが，地殻活動に伴う地下水流動をモニターできる数少ない方法として今後の発展が期待されます。